GNOMONIQUE ANALYTIQUE

Par M. Puissant

Définitions.

Si on conçoit une tige de fer droite, dirigée parallèlement à l'axe du monde, et scellée dans un mur, du côté où l'une de ses faces planes est éclairée par le soleil, l'ombre de la tige entière représentera sur ce mur la trace d'un méridien céleste passant par le centre du soleil ; et l'ombre de l'extrémité antérieure de la tige parcourra, dans le même jour, une courbe qui sera la trace d'un cône droit, dont la génératrice fait avec la tige un angle égal au complément de la déclinaison de l'astre. L'objet de la gnomonique est d'indiquer l'heure et le jour de ces deux phénomènes.

Vu l'énorme distance à laquelle le soleil se trouve de nous, il est permis de supposer que la tige ou l'*axe* du cadran solaire se confond avec celui de rotation de la terre ; et à cause de la lenteur du mouvement de l'astre dans l'écliptique, il est permis en outre de supposer sa déclinaison constante pendant sa présence sur l'horizon.

Le *centre du cadran* est le point où son axe, réduit par la pensée à une ligne mathématique, le rencontre. Ce point peut être pris eu même temps pour le centre de la terre.

La trace du méridien du lieu sur le cadran se nomme *la méridienne*, parce que c'est sur cette ligne que tombe précisément l'ombre de l'axe à midi vrai.

La projection de l'axe ou du *style* sur le cadran s'appelle *la soustylaire* ; cette ligne est donc la trace même d'un méridien perpendiculaire au plan du cadran. En général, la trace d'un méridien se nomme une *ligne horaire.*

On dit qu'un cadran vertical décline, lorsqu'il n'est point perpendiculaire au méridien du lieu.

Quoique toutes les questions de gnomonique se résolvent facilement et avec élégance par les procédés de la géométrie descriptive, il est cependant nécessaire de faire usage du calcul, lorsqu'on veut tracer les lignes d'un cadran solaire avec toute la précision possible. J'ai seulement pour but, dans ce petit mémoire, de résoudre par l'analyse ce problème général :

Déterminer les lignes horaires et les courbes de déclinaison sur un cadran vertical déclinant, connaissant la longueur de l'axe, la méridienne et la déclinaison du cadran, ainsi que la latitude du lieu [1].

1. Voyez, pour la, détermination de ces éléments, les traités de Gnomonique et le *Journal de l'École Polytechnique,* tom. IV, pag. 261.

Détermination des lignes horaires

Rapportons les points de l'espace à des coordonnées rectangles, et prenons à cet effet, pour axe des x, l'intersection du méridien du lieu avec l'horizon, pour axe des y la trace du premier vertical sur ce dernier plan, et par conséquent pour axe des z la verticale du lieu du cadran.

L'origine des coordonnées pouvant être considérée comme le centre de la terre ou de la sphère céleste, la droite qui joint ce point et le pôle du monde sera toute entière dans le plan des xz, et fera, avec l'axe des x un angle λ égal à la latitude du lieu ou à la hauteur du pôle ; de sorte que dans l'équation

$$z = Ax + By,$$

qui est celle du plan d'un méridien quelconque, on aura

$$A = \operatorname{tang} \lambda.$$

Quant au coefficient B, il dépend visiblement de l'angle que ce méridien fait avec le plan des xz, c'est-à-dire de l'angle horaire p réduit en degrés, à raison de 1 heure pour 15°. Or, on sait que

$$\cos p = \frac{-B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \quad \text{donc} \quad \cos^2 p = \frac{B^2}{\sec^2 \lambda + B^2},$$

et par conséquent

$$B = \frac{\cot p}{\cos \lambda}.$$

Il suit de là que l'équation du plan d'un cercle horaire est

$$z = x \operatorname{tang} \lambda + y \frac{\cot p}{\cos \lambda}\,; \tag{1}$$

En faisant successivement x et z nulles, on aura les traces verticales et horizontales de ces cercles ; et si on prend positivement l'angle horaire p après midi, les lignes horaires seront toutes dirigées vers l'est : le contraire aura lieu en considérant p comme négatif ; et pour lors, dans l'un comme dans l'autre cas, les x positives se compteront du sud au nord, les y positives de l'ouest à l'est, et les z positives de haut en bas.

Maintenant soit pris pour cadran le plan même des yz, c'est-à-dire, le plan vertical non déclinant : on aura pour l'équation des lignes horaires

$$z = y \frac{\cot p}{\cos \lambda}; \tag{2}$$

et si H désigne l'angle qu'une de ces lignes fait avec l'axe des z ou la méridienne, on aura par conséquent

$$\operatorname{tang} H = \frac{y}{z} = \cos \lambda \operatorname{tang} p,$$

ou, désignant par i l'inclinaison de l'axe ou du style sur le cadran, on aura, à cause de $i = 90° - \lambda$,

$$\operatorname{tang} H = \sin i \operatorname{tang} p\,; \tag{3}$$

équation qui a lieu pour le cadran horizontal comme pour le cadran vertical régulier ; mais dans le cas du premier cadran, on a nécessairement $i = \lambda$.

Pour résoudre le problème que nous avons principalement en vue, soit θ la déclinaison du cadran, comptée de l'ouest au nord, à partir de l'axe des y ; et afin de prendre les coordonnées des points des lignes horaires dans le plan même du cadran, ce qui est beaucoup plus commode pour les constructions, employons les formules connues pour passer d'un système de coordonnées rectangles à un autre système de même nature, savoir,

$$\begin{aligned} x &= y' \sin\theta + x' \cos\theta, \\ y &= y' \cos\theta - x' \sin\theta, \\ z &= z'\,; \end{aligned}$$

alors l'équation (1), rapportée aux nouvelles coordonnées, deviendra

$$\begin{aligned} z' \cos\lambda = {} & x' \sin\lambda \cos\theta + y' \sin\lambda \sin\theta \\ & - x' \cot p \sin\theta + y' \cot p \cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

De là l'équation des lignes horaires, sur le plan vertical déclinant $y'z'$ est

$$z' \cos\lambda = y'(\sin\lambda \sin\theta + \cot p \cos\theta); \tag{5}$$

ainsi appelant toujours H l'angle d'une de ces lignes avec la méridienne, on a

$$\cot H = \operatorname{tang}\lambda \sin\theta + \frac{\cot p \cos\theta}{\cos\lambda}\,; \tag{6}$$

Cette formule, qui est une de celles de la trigonométrie sphérique, se calcule plus commodément par les logarithmes, en décomposant le second membre en facteurs ; mais pour rendre cette décomposition possible, soit un angle auxiliaire ϕ, tel qu'on ait

$$\cot H = K \cos(\theta - \phi),$$

K étant de plus un coefficient inconnu dont on déterminera la valeur ainsi qu'il suit :

D'abord on a, en développant,

$$\cot H = K \sin\phi \sin\theta + K \cos\phi \cos\theta,$$

ensuite, si on égale terme à terme cette valeur de $\cot H$ avec la précédente, on aura

$$K \sin\phi = \operatorname{tang}\lambda, \quad K \cos\phi = \frac{\cot p}{\cos\lambda},$$

partant

$$K = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin\phi}; \quad \operatorname{tang}\phi = \sin\lambda \operatorname{tang} p \tag{7}$$

et enfin

$$\cot H = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin\phi}\cos(\theta - \phi) \tag{8}$$

La valeur de $\operatorname{tang}\phi$, qui est analogue à celle (3), fait voir, comme les considérations géométriques, que le cadran irrégulier et le cadran horizontal peuvent se déduire réciproquement l'un de l'autre.

Il est utile de connaître l'angle que la soustylaire fait avec la méridienne du plan du cadran, ainsi qu'on le verra bientôt. Pour trouver cet angle, soit V celui qu'un cercle horaire fait en général avec le cadran ; on aura

$$\cos V = \frac{-M}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}},$$

en représentant généralement par $z' = Mx' + Ny'$, l'équation (4) du plan de ce cercle, et auquel cas

$$M = \operatorname{tang}\lambda\cos\theta - \frac{\cot p \sin\theta}{\cos\lambda},$$

$$N = \operatorname{tang}\lambda\sin\theta + \frac{\cot p \cos\theta}{\cos\lambda}.$$

Mais pour particulariser le cercle que nous considérons, soit $V = 90°$, ou $\cos V = 0$; alors on aura $-M = 0$, d'où l'on tire, en désignant par p' la valeur actuelle de p,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin\lambda}{\cot p'}. \tag{9}$$

Telle est la relation qui doit exister entre les angles θ, λ et p', pour que le cercle horaire faisant un angle p' avec le méridien du lieu, soit perpendiculaire au cadran. Mais, par ce qui précède, la tangente de l'angle d'une ligne horaire avec la méridienne du cadran, est, en général,

$$\operatorname{tang} H = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda\sin\theta + \cot p\cos\theta},$$

donc celle de l'angle H' de la soustylaire avec cette même méridienne sera, à cause de la relation précédente,

$$\operatorname{tang} H' = \cot\lambda\sin\theta. \tag{10}$$

Cet angle H' est nécessairement nul en même temps que θ ; ainsi, lorsque le cadran est vertical non déclinant, la soustylaire et la méridienne se confondent ; ce qui est d'ailleurs de toute évidence.

Supposons maintenant qu'un certain nombre de méridiens soient placés symétriquement de part et d'autre du plan déterminé par l'axe du cadran et sa projection ou la soustylaire : dans ce cas, leurs traces sur le cadran seront de même disposées symétriquement à droite et à gauche de cette soustylaire ; si donc l'on prenait pour axe des coordonnées, cette ligne et une droite qui lui fût perpendiculaire, et qui se trouvât toujours sur le cadran, les traces ou lignes horaires dont il est question, se détermineraient par la même formule relative au cadran vertical non déclinant ; seulement il faudrait substituer pour λ le complément de l'angle i que l'axe fait avec la soustylaire, et pour p l'inclinaison ϖ d'un cercle horaire sur le plan de l'axe et de la soustylaire, ce qui est assez évident. Or, l'heure à laquelle le centre du soleil se trouve dans ce plan est, par ce qui précède, donné par la formule $\cot p' = \dfrac{\sin\lambda}{\operatorname{tang}\theta}$, puisque p' est l'angle horaire compté à partir du méridien du lieu.

Désignant donc par P un autre angle horaire supposé plus grand que p', on aura $\varpi = P - p'$; et l'équation (3) en y changeant H en h, afin d'indiquer que l'angle h se compte maintenant de la soustylaire, deviendra alors,

$$\operatorname{tang} h = \sin i \operatorname{tang}\varpi = \sin i \operatorname{tang}(Pp')$$

ou

$$\operatorname{tang}(H - H') = \sin i \operatorname{tang}(P - p'). \tag{11}$$

Ce dernier procédé, qui pourra être employé pour déterminer les directions des lignes horaires sur le cadran vertical déclinant, sera plus simple que celui qui dérive de l'emploi de la valeur. ci-dessus de $\cot H$.

Si on voulait avoir l'angle i en fonction de la déclinaison θ du cadran et de la hauteur λ du pôle, cela serait très facile : en effet, on remarquera que l'équation du plan $y'z'$ du cadran, par rapport aux coordonnées primitives, est

$$x = y \operatorname{tang}\theta$$

et que les équations de l'axe sont

$$x = z \cot\lambda, \quad y = 0\,;$$

puis, si on se rappelle que quand

$$x = az, \quad y = bz$$

sont les équations d'une droite, et que

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est celle d'un plan, le sinus de l'angle i de cette droite avec ce plan est

$$\sin i = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

On en conclura pour le cas actuel, et à cause de

$$b = 0,\ a = \cot\lambda,\ A = 1,\ B = \operatorname{tang}\theta,\ C = 0,$$

que

$$\sin i = \frac{\cot\lambda}{\sqrt{1+\cot^2\lambda}\,\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta}} = \frac{\cos\lambda}{\sec\theta} = \cos\lambda\cos\theta\,; \tag{12}$$

résultat qui se déduit d'ailleurs immédiatement de la trigonométrie sphérique, ainsi que tous ceux qui précèdent. On trouverait de la même manière l'inclinaison ξ de l'axe sur une ligne horaire, supposant que l'on connût les angles i et h ; et il n'est pas difficile de voir que l'on aurait

$$\cos\xi = \cos i\,\cos h = \cos i\,\cos(H - H') \tag{13}$$

Détermination des courbes diurnes.

L'équation d'une courbe diurne, c'est-à-dire, de celle que trace sur le cadran l'ombre de l'extrémité de l'axe, ou un faisceau de lumière passant par une petite ouverture circulaire pratiquée au milieu d'une plaque qui tient souvent lieu d'axe, se détermine comme il suit :

Soit r la longueur de l'axe, prise en même temps pour celle du rayon d'une sphère concentrique à la sphère céleste ; et supposons pour un moment que le centre de cette petite sphère soit l'extrémité antérieure de cet axe. Supposons, de plus, que la déclinaison δ du soleil soit boréale, ou, ce qui est de même, que la latitude du parallèle décrit par cet astre en vingt-quatre heures, soit $+\delta$. Comme le plan de ce parallèle est perpendiculaire à celui des xz, son équation sera généralement

$$z = A'x + D',$$

et à cause que A' est, dans ce cas, la tangente de l'angle qu'il fait avec le plan des xy, on a

$$A' = -cot\lambda\,;$$

D'ailleurs, la plus courte distance de l'origine des coordonnées, au plan de ce même parallèle, étant égale d'une part à $r\sin\delta$, et d'autre part à $\dfrac{D'}{\sqrt{1+A'^2}}$, il s'ensuit que l'on a

$$r\sin\delta = \frac{D'}{\operatorname{cosec}\lambda} \quad \text{et} \quad D' = \frac{r\sin\delta}{\sin\lambda},$$

et par conséquent

$$z = -x\cot\lambda + \frac{r\sin\delta}{\sin\lambda}\cdot \tag{14}$$

Actuellement, il s'agit de trouver l'équation de la surface conique engendrée par le rayon lumineux qui décrit la courbe de déclinaison sur le plan. Or, les projections verticales de ce rayon sont en général

$$x = mz, y = nz$$

l'équation de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

et celle du plan d'un parallèle à l'équateur,

$$z = A'x + D' ;$$

par conséquent, si on suppose que ces quatre équations aient lieu en même temps, on trouvera, en les combinant entr'elles que l'équation de la surface conique cherchée est

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2(z - A'x)^2}{D'^2},$$

et si on fait x constante et égale à α, l'équation résultante

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2(z - A'\alpha)^2}{D'^2}$$

sera celle de la trace du cône sur un plan vertical parallèle à l'axe des y et par conséquent non déclinant. Substituant pour A' et D' leurs valeurs précédentes, et faisant attention que $\alpha = r\cos\lambda$, on aura, après les opérations nécessaires, et avoir fait z négative, afin de se conformer à l'hypothèse faite sur la déclinaison δ du soleil,

$$z^2(\sin^2\delta - \sin^2\lambda) + 2rz\cos^2\lambda\sin\lambda + y^2\sin^2\delta = \cos^2\lambda\,(\cos^2\lambda - \sin^2\delta).$$

Cette équation devient plus simple, quand on place l'origine des z à la racine même de l'axe du cadran, comme on l'a fait précédemment, et alors on a $z = z' - r\sin\lambda$; par suite

$$z'^2(\cos^2 i - \sin^2\delta) - 2rz'\cos i\,\cos^2\delta + r^2\cos^2\delta = 0, \tag{15}$$

à cause de $i = 90° - \lambda$.

Il suit de là que la courbe diurne on de déclinaison est une hyperbole ou une ellipse, selon que le complément de l'inclinaison de l'axe sur le cadran est plus grand ou plus petit que la déclinaison du soleil ; elle est, au contraire, une parabole, si $\cos i = \sin\delta$.

Lorsque $\delta = 0$, l'équation précédente se réduit à

$$z' = \frac{r}{\cos i}, \tag{16}$$

ce qui signifie que l'*équinoxiale* du cadran est une droite perpendiculaire à la soustylaire ; et en effet, le plan de l'équateur dans lequel se trouve alors le soleil, étant perpendiculaire à l'axe du monde, la trace de ce plan sur le cadran doit être aussi perpendiculaire à la projection de l'axe.

Il est remarquable que l'équation ci-dessus de la courbe diurne, et même celles (11) et (13), conviennent parfaitement à un cadran situé d'une manière quelconque, à l'égard des plans coordonnés primitifs ; pourvu que, sans changer l'origine des coordonnées, l'on prenne pour axe des z' la soustylaire, et pour axe des y' une perpendiculaire à cette ligne, située dans le plan du cadran. Dionis-du-Séjour, en résolvant les mêmes questions à la fin du premier volume de son *Traité analytique du Mouvement apparent des Corps célestes* , mais par une analyse toute différente de celle qui précède, n'a pas manqué de choisir ce système de coordonnées, parce que les formules pour calculer les parties d'un cadran solaire sont, par ce moyen, aussi simples qu'il est possible de le désirer.

Pour compléter la théorie actuelle, j'observerai que l'on détermine très facilement les points où les courbes de déclinaison coupent les lignes horaires, en calculant les distances de ces. points au centre du cadran, à l'aide des angles δ, ξ, et de la longueur r de l'axe ; car soit r' une de ces distances, on aura, par la propriété du triangle rectiligne,

$$r' = \frac{r\cos\delta}{\cos(\delta+\xi)}, \tag{17}$$

dans la supposition que la déclinaison du soleil est boréale : on écrirait au dénominateur, $\cos(\xi-\delta)$ au lieu de $\cos(\xi+\delta)$, si la déclinaison était australe.

Les points de la *méridienne du temps moyen* se déterminent par la même méthode ; on cherche la ligne horaire correspondante à *midi moyen* pour un jour proposé, puis l'on obtient par la formule (17) la valeur de r' en taisant usage de la déclinaison du soleil pour ce jour-là.

Exemple numérique.

Le cadran solaire exécuté au Dépôt général de la guerre, dont la latitude $\lambda = 48^\circ\,51'\,37''$, décline vers l'ouest d'une quantité angulaire $\theta = 29^\circ\,23'\frac{6}{10}$ et la longueur de l'axe $r = 1,4915$ m ; trouver la ligne horaire de 1 heure, et le point où la courbe de déclinaison du soleil coupe cette ligne, lorsque cette déclinaison est boréale et égale à $\delta = 14^\circ\,29'\,20''$.

D'abord l'angle horaire . . . . P ou $p = 15^\circ$.
Par suite de l'équation (9) on déduit . . $p' = 36^\circ\,47'\,50''$.
Avec celle (10) on obtient . . . . $H' = 23^\circ\,12'\,25''$.
L'équation (12) donne . . . . $i = 34^\circ\,58'\,30''$.
Celle (11) . . . . $H - H' = -12^\circ\,54'\,40''$.
Ainsi l'angle de la ligne horaire de 1 heure
avec la méridienne du cadran, est $H = 10^\circ\,17'45''$.
L'équation (13) donne . . . . $\xi = 36^\circ\,59'\,40''$.
Enfin celle (17) . . . . $r' = 2,3189$ m.

Les quantités p', H', i étant constantes pour le même cadran, il ne s'agira par conséquent que de recourir aux formules (11), (13) et (17), pour déterminer tout autre point d'intersection.